グッドによるベイズ主義的な確証度*

北島雄一郎

概要

Bayesian measure $\mathfrak{c}(H, E|K)$ of confirmation is the degree to which known evidence E supports a given hypothesis H relative to background knowledge K. This measure should be positive when E confirms H, negative when E disconfirms H and zero when E is irrelevant to H. There are many Bayesian measures of confirmation which satisfy this condition. $\log \Pr(E|H \wedge K)/\Pr(E|\neg H \wedge K)$, which was proposed by Good, is one of them. In the present paper, it is shown that only Good's measure is valid in the case where the measure $\mathfrak{c}(H, E_1 \wedge E_2|K)$ of confirmation is the sum of $\mathfrak{c}(H, E_1|K)$ and $\mathfrak{c}(H, E_2|K)$ when, in Reichenbach's terminology, H screens off E_1 from E_2.

Keywords: Bayesianism; Confirmation; Screening-Off

1 はじめに

確証度とは、ある背景知識のもとで仮説が証拠によってどれくらい確証されたかを示す量的な尺度である。背景知識 K のもとでの証拠 E の確率 $\Pr(E|K)$、背景知識 K のもとでの仮説 H の確率 $\Pr(H|K)$、背景知識 K と仮説 H のもとでの証拠 E の確率 $\Pr(E|H \wedge K)$ が与えられたら、ベイズの定理を用いて背景知識 K と証拠 E のもとでの仮説の確率 $\Pr(H|E \wedge K)$ は

$$\Pr(H|E \wedge K) = \frac{\Pr(E|H \wedge K)\Pr(H|K)}{\Pr(E|K)}$$

と計算することができる。$\Pr(H|E \wedge K)$ の値が大きいとしても必ずしも仮説 H が証拠 E によって確証されたとはみなせない。なぜなら、$\Pr(H|K)$ の値も大きく、$\Pr(H|E \wedge K) < \Pr(H|K)$ かもしれないからである。

背景知識 K のもとで仮説 H が証拠 E によって確証されているとき確証度 $\mathfrak{c}(H, E|K)$ は 0 より大

* *CAP* Vol. 1 (2009) pp. 1-12. 受理日 2008.10.22 採用日 2009.5.29 採用カテゴリ: 研究論文（原著論文）掲載日: 2009.10.28

きいと考えるならば、確証度は以下の条件をみたしているべきだろう。

$$Pr(H|E \wedge K) > \Pr(H|K) \quad \text{ならば} \quad \mathfrak{c}(H, E|K) > 0 \tag{1}$$

$$Pr(H|E \wedge K) = \Pr(H|K) \quad \text{ならば} \quad \mathfrak{c}(H, E|K) = 0 \tag{2}$$

$$Pr(H|E \wedge K) < \Pr(H|K) \quad \text{ならば} \quad \mathfrak{c}(H, E|K) < 0 \tag{3}$$

この条件をみたしている確証度はたくさんある。例えば、$\Pr(H|E \wedge K) - \Pr(H|K)$、$\log \Pr(H|E \wedge K)/\Pr(H|K)$、$\log \Pr(E|H \wedge K)/\Pr(E|\neg H \wedge K)$ はこれらの条件をみたす。最後にあげた確証度

$$\log \frac{\Pr(E|H \wedge K)}{\Pr(E|\neg H \wedge K)}$$

が Good (1960) による確証度である。

Fitelson (1999) は、確証に関する哲学的議論、例えば Popper and Miller (1983) による、帰納的確率は存在しないという議論の妥当性を考える上で、どの確証度を選ぶかが重要であると述べている (p.S365)。2 節で、 Popper and Miller (1983) の議論を紹介する。

3.1 節で紹介するように、Fitelson (2001) はグッドによる確証度を含むいくつかの確証度を取り上げ、これらの確証度の中でグッドによる確証度が妥当であると結論した。しかし、この議論では取り上げられた確証度以外に妥当な確証度が存在する可能性を否定できない。

3.2 節ではまず、仮説 H のもとで二つの証拠 E_1 と E_2 が無関係であるならば、E_1 と E_2 がともに H を確証しているとき E_1 という証拠だけが得られた場合より $E_1 \wedge E_2$ という二つの証拠が得られた場合のほうが仮説 H はより確からしくなるという直観を数学的に表すことを試みる。そして、この直観を数学的に表した条件を含むいくつかの条件を満足する確証度はグッドによる確証度のみであるということを示す（定理 8)。したがって、これらの条件のもとではグッドによる確証度のみが妥当であるということになる。

2 ポパーとミラーによる帰納的確率は存在しないという議論

Popper and Miller (1983) は、帰納的確率は存在しないと論じた。この節では、その議論を紹介する。以下、H は仮説、E は証拠、K は背景知識を表すことにする。

彼らは、

$$\mathfrak{s}(H, E|K) := \Pr(H|E \wedge K) - \Pr(H|K)$$

と定義し、$\mathfrak{s}(H, E|K)$ を「確率的支持の測度」(a measure of probabilistic support) とみなした (Popper and Miller, 1987, p.574)。このとき、簡単な計算から

$$\mathfrak{s}(H, E|K) = \mathfrak{s}(H \vee E, E|K) + \mathfrak{s}(H \vee \neg E, E|K) \tag{4}$$

となる[*1] (cf. Popper and Miller, 1987, p.574)。

[*1] $\Pr(H|E \wedge K) = \Pr(H \vee E|E \wedge K) + \Pr(H \vee \neg E|E \wedge K)$、$\Pr(H|K) = \Pr(H \vee E|K) + \Pr(H \vee \neg E|K)$ であることに注意すればよい。

E は $H \vee E$ を含意しているので $\mathfrak{s}(H \vee E, E|K)$ は H の E に対する演繹的な依存関係をあらわしている（cf. Popper and Miller, 1987, p.575）が、E は $H \vee \neg E$ を含意しないので $H \vee \neg E$ が「E を超える H のすべて」(p.687) であると Popper and Miller (1983) は考えた。つまり、彼らによれば $\mathfrak{s}(H \vee \neg E, E|K)$ が H の E に対する帰納的な依存関係を表している部分である（cf. Popper and Miller, 1987, p.575)。しかし、$\Pr(H|E \wedge K) \neq 1$ かつ $\Pr(E|K) \neq 1$ であるとき、

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s}(H \vee \neg E, E|K) &= \Pr(H \vee \neg E|E \wedge K) - \Pr(H \vee \neg E|K) \\
&= \Pr(H|E \wedge K) - \Pr(\neg(\neg H \wedge E)|K) \\
&= \Pr(H|E \wedge K) - (1 - \Pr(\neg H \wedge E|K)) \\
&= \Pr(H|E \wedge K) - (1 - \Pr(E|K) + \Pr(H \wedge E|K)) \\
&= \Pr(H|E \wedge K) - 1 + \Pr(E|K) - \Pr(H|E \wedge K)\Pr(E|K) \\
&= -(1 - \Pr(H|E \wedge K))(1 - \Pr(E|K)) \\
&< 0
\end{aligned}$$

となる（Popper and Miller, 1983, p.688)。つまり、H の E に対する帰納的な依存関係を表している部分の確率的支持の測度は負となる（cf. (3))。彼らはこの結果に基づいて、「この結果は確率計算の帰納的解釈を完全に壊滅させる」（Popper and Miller, 1983, p.688）と結論した。

この議論に対して、いくつかの反論がある。一つは、Eells (1988) によってなされた反論で、$\mathfrak{s}(H, E|K)$ を帰納的な部分と演繹的な部分に分けることは妥当でないという反論である。Eells (1988) は、$\mathfrak{s}(H \vee E, E|K)$ は H の E に対する演繹的な関係を表している部分ではなく、この部分も帰納的な関係を表している部分であるということを説得的に論じた。

Eells (1988) の議論は妥当であると考えられるが、さらに他の反論もある。それは、Redehead (1985) によってなされた反論で、確率的支持の測度として $\Pr(H|E \wedge K)/\Pr(H|K)$ を選べば (4) 式は成立しないという反論である（Redhead, 1985, p.190)。例えば、$\Pr(E|H \wedge K) = 1$ のとき $\Pr(E|K) \geq \Pr(E \wedge H|K) > 0$ となるので、

$$\frac{\Pr(H|E \wedge K)}{\Pr(H|K)} = \frac{1}{\Pr(E|K)} < \infty$$

$$\frac{\Pr(H \vee E|E \wedge K)}{\Pr(H \vee E|K)} + \frac{\Pr(H \vee \neg E|E \wedge K)}{\Pr(H \vee \neg E|K)} = \infty$$

となる。

Redhead (1985) に対して、Gillies (1986) は Popper and Miller (1983) の議論を回避するために $\mathfrak{s}(H, E|K)$ 以外の確率的支持の測度を採用するのはアドホックであると述べ（Gillies, 1986, p.111)、さらに $\Pr(H|E \wedge K)/\Pr(H|K)$ という確率的支持の測度の問題点も指摘している（Gillies, 1986, p.112)。

Fitelson (1999) はこの一連の議論をどの確証度が妥当であるかという議論であるとみなした (p.S365)。そして、Gillies (1986) が議論しなかったグッドによる確証度も (4) 式を満足しないということを指摘した (Fitelson, 1999, Theorem 1)。例えば、$\Pr(E|H \wedge K) = 1$ かつ $\Pr(E|K) \neq \Pr(H|K)$

のとき

$$\log \frac{\Pr(E|H \wedge K)}{\Pr(E|\neg H \wedge K)} = \log \frac{1 - \Pr(H|K)}{\Pr(E|K) - \Pr(H|K)} < \infty$$

$$\log \frac{\Pr(E|(H \vee E) \wedge K)}{\Pr(E|\neg(H \vee E) \wedge K)} + \log \frac{\Pr(E|(H \vee \neg E) \wedge K)}{\Pr(E|\neg(H \vee \neg E) \wedge K)} = \infty$$

となる。したがって、ある条件のもとでグッドによる確証度が正当化されたならば、少なくともその条件の下では Popper and Miller (1983) の議論は成立しない。

これに対して、ポパーとミラーの議論は、確率的支持の測度を $\Pr(H|E \wedge K) - \Pr(H|K)$ を採用した場合の議論であるから、ほかの確証度をもちだすのは彼らの意図に反するという反論があるかもしれない。しかし、そうであるならば、「この結果は確率計算の帰納的解釈を完全に壊滅させる」(Popper and Miller, 1983, p.688) という結論は一般的に成り立つ結論ではなく、確率的支持の測度を $\Pr(H|E \wedge K) - \Pr(H|K)$ とした場合にのみ成り立つ結論ということになる。

3　グッドによる確証度の擁護

この節では、$\mathfrak{c}(H, E|K)$ は、背景知識 K のもとで証拠 E によって仮説 H を確証する度合い、つまり証拠 E による H の確証度を表すことにする。

3.1　Fitelson (2001) による議論

Fitelson (2001) は以下の確証度のなかでどれが妥当な確証度であるかという問題を考えた。

$$\Pr(H|E \wedge K) - \Pr(H|K)$$

$$\log \frac{\Pr(H|E \wedge K)}{\Pr(H|K)}$$

$$\Pr(H|E \wedge K) - \Pr(H|\neg E \wedge K)$$

$$\log \frac{\Pr(E|H \wedge K)}{\Pr(E|\neg H \wedge K)}$$

そして、この問題を考えるために、次のような例を考えている。

例 1 (Fitelson, 2001, pp.S128-S129). 壺の集まりの中から、ひとつだけ壺を選ぶとする。それぞれの壺には、いくつかボールが入っている。壺には二つのタイプがあり、ひとつは白いボールが x の割合で入っていて、もう一つは白いボールが y の割合で入っている。最初のタイプの壺の割合は z とする。ただし、$0 < x, y, z < 1$ である。まず壺を一つ選び、その壺からランダムにボールを取り出す。取りだしたボールは壺に戻し、再びその壺からボールをランダムに取り出す。

H を「選んだ壺の中の白いボールの割合は x である」という仮説、W_i を「i 番目に取り出したボールは白である」という証拠としよう。W_1 と W_2 は H の独立な証拠であるとみなせるだろう。この直観をもとに Fitelson (2001) は次のような条件を考えた。

条件 2 (Fitelson, 2001, p.S129). $\mathfrak{c}$ は妥当な確証度であるとする。このとき、例 *1* において、任意の x、y、z に対して、$\mathfrak{c}(H, W_1|W_2 \wedge K) = \mathfrak{c}(H, W_1|K)$ かつ $\mathfrak{c}(H, W_2|W_1 \wedge K) = \mathfrak{c}(H, W_2|K)$ である。

そして、上で挙げた 4 つの確証度の中で、条件 2 を満足するのはグッドによる確証度 $\log \mathrm{Pr}(E|H \wedge K)/\mathrm{Pr}(E|\neg H \wedge K)$ のみであるということを示した（Fitelson, 2001, Theorem 3）。

さらに、Fiteson (2001) は、条件 2 は次の条件の特殊な場合であると指摘した。

条件 3 (Fitelson, 2001, p.S130). $\mathfrak{c}$ が妥当な確証度であるとする。このとき、仮説 H が証拠 E_1 を証拠 E_2 からスクリーン・オフしている、つまり

$$Pr(E_1 \wedge E_2|H \wedge K) = Pr(E_1|H \wedge K)Pr(E_2|H \wedge K)$$

$$Pr(E_1 \wedge E_2|\neg H \wedge K) = Pr(E_1|\neg H \wedge K)Pr(E_2|\neg H \wedge K)$$

ならば、$\mathfrak{c}(H, E_1|E_2 \wedge K) = \mathfrak{c}(H, E_1|K)$ かつ $\mathfrak{c}(H, E_2|E_1 \wedge K) = \mathfrak{c}(H, E_2|K)$ である。

Fitelson (2001) は、この条件を「魅力的である」（attractive）と述べている（p.S130）。しかし、4 つの確証度のうちどの確証度が妥当であるのかという問題を考える際、条件 3 より弱い条件である条件 2 を使うだけで十分であるという理由と、条件 2 のほうが条件 3 より直観的であるという理由から、条件 3 ではなく条件 2 を選ぶと Fitelson (2001) は述べている（Fitelson, 2001, 注 15）。

3.2 節で議論するように条件 3 は妥当な条件であると考えられるので、本稿では条件 2 ではなく条件 3 をもちいる。

3.2 グッドによる確証度の一意性

Fitelson (2001) は 3.1 節であげた 4 つの確証度だけを取り上げ、その中でグッドの確証度が妥当であると論じた。しかし、この議論では 4 つの確証度以外に妥当な確証度が存在する可能性を否定できない。この節では、条件 2 とは異なる次のような条件を考え、その条件を含むいくつかの条件の下でグッドによる確証度のみが導かれることを示す。

条件 4. $\mathfrak{c}$ を妥当な確証度とする。このとき、仮説 H が証拠 E_1 を証拠 E_2 からスクリーン・オフしている（*cf. Reichenbach, 1956, §19*）、つまり

$$Pr(E_1 \wedge E_2|H \wedge K) = Pr(E_1|H \wedge K)Pr(E_2|H \wedge K)$$

$$Pr(E_1 \wedge E_2|\neg H \wedge K) = Pr(E_1|\neg H \wedge K)Pr(E_2|\neg H \wedge K)$$

であれば、証拠 E_1 と E_2 による仮説 H の確証度 $\mathfrak{c}(H, E_1 \wedge E_2|K)$ は、証拠 E_1 による仮説 H の確証度 $\mathfrak{c}(H, E_1|K)$ と証拠 E_2 による仮説 H の確証度 $\mathfrak{c}(H, E_2|K)$ の和に等しい。

$$\mathfrak{c}(H, E_1 \wedge E_2|K) = \mathfrak{c}(H, E_1|K) + \mathfrak{c}(H, E_2|K)$$

この条件は、仮説 H のもとで二つの証拠 E_1 と E_2 が無関係であるならば、E_1 と E_2 がともに H を確証しているとき E_1 というの証拠だけが得られた場合より $E_1 \wedge E_2$ という二つの証拠が得られた場合のほうが仮説 H はより確からしくなるという直観を表そうとした条件である。この直観を条件 4 が適切に表しているのかどうかをみるために、条件 4 を条件 3 と次の条件に分けよう。

条件 5 (Fitelson, 2001, p.S125). $\mathfrak{c}$ を妥当な確証度とする。$\mathfrak{c}(H, E_1|E_2 \wedge K) = \mathfrak{c}(H, E_1|K)$ かつ $\mathfrak{c}(H, E_2|E_1 \wedge K) = \mathfrak{c}(H, E_2|K)$ であるならば、$\mathfrak{c}(H, E_1 \wedge E_2|K) = \mathfrak{c}(H, E_1|K) + \mathfrak{c}(H, E_2|K)$ である。

条件 3 と条件 5 をより明確にするために次のような例を考える。

例 6 (cf. Salmon, 1980, p.58). 太郎は普段朝 *9* 時に職場に到着する。しかし、他の職場にいる次郎と共同で仕事をしている都合上、曜日は決まっていないが週一回だけ必ず次郎に太郎の職場に来てもらい、朝 *8* 時から次郎と打ち合わせをする。そのため打ち合わせの日、太郎は *7* 時 *30* 分に職場に到着する。太郎は普段はコーヒーを飲まないが朝 *7* 時 *30* 分に職場に来る日は眠気覚ましのためにコーヒーを飲む。そのため太郎の秘書は太郎のために朝 *7* 時 *20* 分にはポットにコーヒーを用意しておき太郎がすぐにコーヒーを飲むことができるようにしている。太郎と次郎の会社の同僚が、「金曜日に太郎が朝 *7* 時 *30* 分に職場に到着した」という仮説 C を立てたとしよう。この仮説を「次郎が金曜日の朝 *8* 時に太郎の職場に到着する」という証拠 A と「太郎のために金曜日の朝 *7* 時 *20* 分にポットにコーヒーが用意されている」という証拠 B で確証する場合を考える。

また、$Pr(A|C) = Pr(B|C) = 0.9$、$Pr(A \wedge B|C) = 0.81$、$Pr(A|\neg C) = Pr(B|\neg C) = 0.05$、$Pr(A \wedge B|\neg C) = 0.0025$、$Pr(C) = 0.2$ であるとする。

例 6 において、

$$\Pr(A|C)\Pr(B|C) = \Pr(A \wedge B|C)$$

$$\Pr(A|\neg C)\Pr(B|\neg C) = \Pr(A \wedge B|\neg C)$$

である。これは、

$$\Pr(B|C \wedge A) = \Pr(B|C \wedge \neg A)$$

$$\Pr(B|\neg C \wedge A) = \Pr(B|\neg C \wedge \neg A)$$

ということと同値である。この式は、太郎が朝 7 時 30 分に職場に到着している場合も到着していない場合も太郎のためにコーヒーが用意されている確率は次郎が朝 8 時に太郎の職場に到着したかどうかに依存しないということを意味している。このとき、会社の同僚は仮説 C のもとで A と B は無関係であると考え、A と B は独立に C を確証しているとみなすだろう。

この議論は次のように一般化できる。条件 3 における

$$\Pr(E_1 \wedge E_2|H \wedge K) = \Pr(E_1|H \wedge K)\Pr(E_2|H \wedge K)$$

$$\Pr(E_1 \wedge E_2|\neg H \wedge K) = \Pr(E_1|\neg H \wedge K)\Pr(E_2|\neg H \wedge K)$$

は

$$\Pr(E_1|H \wedge E_2 \wedge K) = \Pr(E_1|H \wedge \neg E_2 \wedge K)$$
$$\Pr(E_1|\neg H \wedge E_2 \wedge K) = \Pr(E_1|\neg H \wedge \neg E_2 \wedge K)$$

と同値である。これは、H や $\neg H$ のもとで、E_1 の確率は E_2 という証拠が得られたかどうかに依存しないということを意味している。よって、E_1 と E_2 は H のもとで無関係であると解釈できるから、E_1 と E_2 は独立に H を確証していると考えてもよいだろう。このことを表した条件が条件 3 である。

次に条件 5 を考えよう。例 6 における同僚が金曜日の朝 8 時に太郎の職場で次郎を目撃したならば、その仮説は確からしくなったと考えるだろう。

$$\Pr(C|A) = \frac{\Pr(A|C)\Pr(C)}{\Pr(A|C)\Pr(C) + \Pr(A|\neg C)\Pr(\neg C)} \approx 0.81 > 0.2 = \Pr(C)$$

同様にその同僚が、金曜日に太郎のために朝 7 時 20 分にポットにコーヒーが用意されていることに気づいたとしても、その仮説は確からしくなったと考えるだろう。

$$\Pr(C|B) = \frac{\Pr(B|C)\Pr(C)}{\Pr(B|C)\Pr(C) + \Pr(B|\neg C)\Pr(\neg C)} \approx 0.81 > 0.2 = \Pr(C)$$

さらに、同僚が金曜日に太郎のために朝 7 時 20 分にポットにコーヒーが用意されていて、金曜日に次郎が朝 8 時に太郎の職場に現れたとしたら、つまり A かつ B という証拠を得たら、仮説 C は証拠 A だけもしくは証拠 B だけを得た場合より確からしくなったと考えられるだろう。

$$\Pr(C|A \wedge B) = \frac{\Pr(A \wedge B|C)\Pr(C)}{\Pr(A \wedge B|C)\Pr(C) + \Pr(A \wedge B|\neg C)\Pr(\neg C)} \approx 0.997 > 0.2 = \Pr(C)$$

一般的に、仮説 H のもとで二つの証拠 E_1 と E_2 が無関係であるならば、E_1 と E_2 がともに H を確証しているとき E_1 という証拠だけが得られた場合より $E_1 \wedge E_2$ という二つの証拠が得られた場合のほうが仮説 H はより確からしくなると考えられる。このことは次のように表すことができる。

条件 7 (cf. Fitelson, 2001, p.S131). $\mathfrak{c}$ を妥当な確証度とする。$\mathfrak{c}(H, E_1|E_2 \wedge K) = \mathfrak{c}(H, E_1|K)$ かつ $\mathfrak{c}(H, E_2|E_1 \wedge K) = \mathfrak{c}(H, E_2|K)$ であるとする。このとき、

1. $\mathfrak{c}(H, E_1 \wedge E_2|K)$ は $\mathfrak{c}(H, E_1|K)$ と $\mathfrak{c}(H, E_2|K)$ のみから決まる、つまり $\mathfrak{c}(H, E_1 \wedge E_2|K)$ は $\mathfrak{c}(H, E_1|K)$ と $\mathfrak{c}(H, E_2|K)$ のみの関数である。
2. $\mathfrak{c}(H, E_1|K) > 0$ かつ $\mathfrak{c}(H, E_2|K) > 0$ ならば、$\mathfrak{c}(H, E_1 \wedge E_2|K) > \mathfrak{c}(H, E_1|K)$ かつ $\mathfrak{c}(H, E_1 \wedge E_2|K) > \mathfrak{c}(H, E_2|K)$ である。

条件 7 を満足するためには、$\mathfrak{c}(H, E_1 \wedge E_2|K)$ は $\mathfrak{c}(H, E_1|K)$、$\mathfrak{c}(H, E_2|K)$ とどのような関係にあるべきなのかを考えよう。例えば、$\mathfrak{c}(H, E_1 \wedge E_2|K) = \mathfrak{c}(H, E_1|K)\mathfrak{c}(H, E_2|K)$ という関係の場合、条件 7 における 2 の条件をみたさない。なぜなら、$\mathfrak{c}(H, E_1|K) = 1$ かつ $\mathfrak{c}(H, E_2|K) > 0$ のとき、$\mathfrak{c}(H, E_1 \wedge E_2|K) = \mathfrak{c}(H, E_2|K)$ となるからだ。

$$\mathfrak{c}(H, E_1 \wedge E_2|K) = \mathfrak{c}(H, E_1|K) + \mathfrak{c}(H, E_2|K) \tag{5}$$

$$\mathfrak{c}(H, E_1 \wedge E_2|K) = \mathfrak{c}(H, E_1|K)^3 + \mathfrak{c}(H, E_2|K)^3 \tag{6}$$

$$\mathfrak{c}(H, E_1 \wedge E_2|K) = \log(\mathfrak{c}(H, E_1|K) + 1) + \log(\mathfrak{c}(H, E_2|K) + 1) \tag{7}$$

などの場合は、条件 7 を満足する。しかし、(6) や (7) の場合は、なぜ確証度を 3 乗したり、確証度の log をとるのかという疑問が生じるだろう。単純性の観点から見て、(5) の場合がもっとも妥当であると考えられる。こうした考えをもとに、条件 5 は定式化されている。条件 3 と条件 5 をまとめた条件が条件 4 である。以上の議論より条件 4 は、仮説 H のもとで二つの証拠 E_1 と E_2 が無関係であるならば、E_1 と E_2 がともに H を確証しているとき E_1 という証拠だけが得られた場合より $E_1 \wedge E_2$ という二つの証拠が得られた場合のほうが仮説 H はより確からしくなるという直観を適切に表していると考えられる。

さらに条件 4 のほかに、$\Pr(H|E \wedge K)/\Pr(\neg H|E \wedge K) = 2(\Pr(H|K)/\Pr(\neg H|K))$ のとき、$\mathfrak{c}(H, E|K) > 0$ と仮定する。なぜなら、$\Pr(H|E \wedge K)/\Pr(\neg H|E \wedge K) = 2(\Pr(H|K)/\Pr(\neg H|K))$ のとき、$\Pr(H|E \wedge K)/\Pr(\neg H|E \wedge K) > \Pr(H|K)/\Pr(\neg H|K)$ だから $\Pr(H|E \wedge K) > \Pr(H|K)$ となるので、確証度は正となるべきであるからだ（cf. (1)）。

最後に、背景知識 K における証拠 E による仮説 H の確証度 $\mathfrak{c}(H, E|K)$ は、$\Pr(H|K)$、$\Pr(E|K)$、$\Pr(E|H \wedge K)$ から決まり、これらの確率がわずかに変化しても $\mathfrak{c}(H, E|K)$ の値もわずかしか変化しないということを要請するために、$\mathfrak{c}(H, E|K)$ は $\Pr(H|K)$、$\Pr(E|K)$、$\Pr(E|H \wedge K)$ の実数値連続関数であると仮定しよう。

これらの条件のもとで、以下の定理が成立する。

定理 8. H を任意の仮説、E、E_1、E_2 を任意の証拠、K を任意の背景知識とする。c を正の実数とする。確証度 $\mathfrak{c}(H, E|K)$ は以下の条件を満足するとする。

1. $\mathfrak{c}(H, E|K)$ は $Pr(H|K)$、$Pr(E|K)$、$Pr(E|H \wedge K)$ の実数値連続関数である。
2. $Pr(H|E \wedge K) = Pr(H|K)$ ならば、$\mathfrak{c}(H, E|K) = 0$ である。
3. $Pr(H|E \wedge K)/Pr(\neg H|E \wedge K) = 2(Pr(H|K)/Pr(\neg H|K))$ ならば、$\mathfrak{c}(H, E|K) = c$ である。
4.
$$Pr(E_1 \wedge E_2|H \wedge K) = Pr(E_1|H \wedge K)Pr(E_2|H \wedge K)$$
かつ、
$$Pr(E_1 \wedge E_2|\neg H \wedge K) = Pr(E_1|\neg H \wedge K)Pr(E_2|\neg H \wedge K),$$
ならば、
$$\mathfrak{c}(H, E_1 \wedge E_2|K) = \mathfrak{c}(H, E_1|K) + \mathfrak{c}(H, E_2|K)$$
である。

このとき、$0 < Pr(H|K) < 1$、$0 < Pr(E|K)$、$0 < Pr(H|E \wedge K) < 1$ ならば、

$$\mathfrak{c}(H, E|K) = c \log_2 \left(\frac{Pr(E|H \wedge K)}{Pr(E|\neg H \wedge K)} \right)$$

となる。

証明. 付録を参照。 □

したがって、定理 8 の条件のもとで、グッドによる確証度が正当化される。

4 おわりに

2 節ではポパーとミラーの議論を紹介し、どの確証度を選ぶかという問題の重要性を強調した。3.1 節で紹介したように、 Fitelson (2001) は 4 つの確証度を取り上げ、その中でグッドによる確証度が妥当であると論じた。しかし、その議論では 4 つの確証度以外に妥当な確証度が存在する可能性を否定できない。

3.2 節では、仮説 H が証拠 E_1 を証拠 E_2 からスクリーン・オフしている、つまり、

$$\Pr(E_1 \wedge E_2 | H \wedge K) = \Pr(E_1 | H \wedge K)\Pr(E_2 | H \wedge K)$$

$$\Pr(E_1 \wedge E_2 | \neg H \wedge K) = \Pr(E_1 | \neg H \wedge K)\Pr(E_2 | \neg H \wedge K)$$

であれば、証拠 E_1 と E_2 による仮説 H の確証度 $\mathfrak{c}(H, E_1 \wedge E_2 | K)$ は、証拠 E_1 による仮説 H の確証度 $\mathfrak{c}(H, E_1 | K)$ と証拠 E_2 による仮説 H の確証度 $\mathfrak{c}(H, E_2 | K)$ の和に等しい

$$\mathfrak{c}(H, E_1 \wedge E_2 | K) = \mathfrak{c}(H, E_1 | K) + \mathfrak{c}(H, E_2 | K)$$

という条件を考えた。これは、仮説 H のもとで二つの証拠 E_1 と E_2 が無関係であるならば、E_1 と E_2 がともに H を確証しているとき E_1 という証拠だけが得られた場合より $E_1 \wedge E_2$ という二つの証拠が得られた場合のほうが仮説 H はより確からしくなるという直観を数学的に表した条件であった。そして、この条件を含むいくつかの条件をみたす確証度はグッドによる確証度のみであるということを定理 8 において示した。Fitelson (2001) によるグッドによる確証度を正当化する議論では、そこで取り上げられた確証度以外の確証度が妥当である可能性が残っていたが、本稿で仮定した条件のもとではグッドによる確証度のみが妥当であるということになる。

付録：定理 8 の証明

次の補題を用いて、定理 8 を証明する。この補題を証明する際、Myrvold (2003) の Appendix を参考にした。

補題 9. $F : (0, 1] \times (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を以下の条件を満足する実数値連続関数とする。c を正の実数とする。

1. $y = z$ ならば $F(x, y, z) = 0$。
2. $x_3 = x_1 x_2$ かつ $z_3 = z_1 z_2 / y$ ならば、$F(x_3, y, z_3) = F(x_1, y, z_1) + F(x_2, y, z_2)$。
3. $z/y = 2$ ならば $F(x, y, z) = c$。

このとき、$F(x, y, z) = c \log_2(z/y)$ となる。

証明. 任意の $0 < x < x' \leq 1$ なる x, x'、$y, z \in (0, \infty)$ に対して、条件 2 より

$$F(x, y, z) = F(x', y, z) + F(x/x', y, y)$$

となる。条件 1 より、$F(x/x', y, y) = 0$ となるので、$F(x, y, z) = F(x', y, z)$ である。よって、$F(x, y, z)$ は x に依存しないので、y と z の関数としてかける。z を z/y に置き換え、

$$H(y, z/y) := F(x, y, z)$$

と定義する。

条件 2 は

$$H(y, u_1 u_2) = H(y, u_1) + H(y, u_2)$$

となる。このとき、$m \neq 0$ なる任意の整数 n, m に対して

$$H(y, 2^{n/m}) = n/m H(y, 2)$$

となる。つまり、u が $2^{n/m}$ という形をしているとき、

$$H(y, u) = H(y, 2) \log_2(u)$$

である。$F(x, y, z)$ の連続性より、任意の $\mu > 0$ に対して

$$H(y, \mu) = H(y, 2) \log_2(\mu)$$

となる。条件 3 より、$c = H(y, 2)$ だから $F(x, y, z) = H(y, \mu) = c \log_2 \mu$ である。 □

定理 *8* の証明.

$$\Pr(E|H \wedge K) = \frac{\Pr(H|E \wedge K)\Pr(E|K)}{\Pr(H|K)}$$

$$0 < \Pr(H|E \wedge K) < 1$$

$$0 < \Pr(E|K)$$

であるから、

$$0 < \Pr(E|H \wedge K)$$

$$0 < \Pr(H|E \wedge K)\Pr(E|K) = \Pr(E \wedge H|K)$$

$$0 < (1 - \Pr(H|E \wedge K))\Pr(E|K) = \Pr(E \wedge \neg H|K)$$

である。

$$\Pr(H|K) = \frac{\Pr(H|K)/\Pr(\neg H|K)}{1 + (\Pr(H|K)/\Pr(\neg H|K))} \tag{8}$$

$$\Pr(E|K) = \Pr(E|H \wedge K) \frac{\Pr(H|K)/\Pr(\neg H|K)}{1 + (\Pr(H|K)/\Pr(\neg H|K))} \frac{(\Pr(E \wedge H|K)/\Pr(E \wedge \neg H|K)) + 1}{\Pr(E \wedge H|K)/\Pr(E \wedge \neg H|K)} \tag{9}$$

であるから、条件 1 より、$\Pr(E|H \wedge K)$、$\Pr(H|K)/\Pr(\neg H|K)$、$\Pr(E \wedge H|K)/\Pr(E \wedge \neg H|K)$ の実数値連続関数 F が存在して、

$$\mathfrak{c}(H, E|K) = F\left(\Pr(E|H \wedge K), \frac{\Pr(H|K)}{\Pr(\neg H|K)}, \frac{\Pr(E \wedge H|K)}{\Pr(E \wedge \neg H|K)}\right)$$

とかける。

$$2 = \frac{\Pr(E \wedge H|K)/\Pr(E \wedge \neg H|K)}{\Pr(H|K)/\Pr(\neg H|K)} = \frac{\Pr(E|H \wedge K)/\Pr(\neg H|E \wedge K)}{\Pr(H|K)/\Pr(\neg H|K)}$$

のとき、条件 3 より $\mathfrak{c}(H, E|K) = c$ である。よって、

$$z/y = 2 \quad \text{ならば} \quad F(x, y, z) = c \tag{10}$$

である。

$\Pr(H|K)/\Pr(\neg H|K) = \Pr(E \wedge H|K)/\Pr(E \wedge \neg H|K)$ ということと $\Pr(H|E \wedge K) = \Pr(H|K)$ ということは同値であるから、条件 2 より

$$y = z \quad \text{ならば} \quad F(x, y, z) = 0 \tag{11}$$

となる。

$$\Pr(E_1 \wedge E_2|H \wedge K) = \Pr(E_1|H \wedge K)\Pr(E_2|H \wedge K)$$

かつ

$$\frac{\Pr(E_1 \wedge E_2 \wedge H|K)}{\Pr(E_1 \wedge E_2 \wedge \neg H|K)} = \frac{(\Pr(E_1 \wedge H|K)/\Pr(E_1 \wedge \neg H|K)) \times (\Pr(E_2 \wedge H|K)/\Pr(E_2 \wedge \neg H|K)}{\Pr(H|K)/\Pr(\neg H|K)}.$$

ということは、

$$\Pr(E_1 \wedge E_2|H \wedge K) = \Pr(E_1|H \wedge K)\Pr(E_2|H \wedge K)$$

かつ

$$\Pr(E_1 \wedge E_2|\neg H \wedge K) = \Pr(E_1|\neg H \wedge K)\Pr(E_2|\neg H \wedge K)$$

ということと同値であるから、条件 4 より

$$\begin{aligned} &x_3 = x_1 x_2 \quad \text{かつ} \quad z_3 = z_1 z_2 / y \quad \text{ならば} \\ &F(x_3, y, z_3) = F(x_1, y, z_1) + F(x_2, y, z_2) \end{aligned} \tag{12}$$

となる。

(10) と (11) と (12) と補題 9 より、

$$\begin{aligned} &F\left(\Pr(E|H \wedge K), \frac{\Pr(H|K)}{\Pr(\neg H|K)}, \frac{\Pr(E \wedge H|K)}{\Pr(E \wedge \neg H|K)}\right) \\ &= c \log_2\left(\frac{\Pr(E \wedge H|K)/\Pr(E \wedge \neg H|K)}{\Pr(H|K)/\Pr(\neg H|K)}\right) \\ &= c \log_2\left(\frac{\Pr(E|H \wedge K)}{\Pr(E|\neg H \wedge K)}\right) \end{aligned}$$

となる。 □

謝辞

本論文の草稿において議論が不十分であった点や不正確であった点を指摘して下さった査読者に感謝します。

参考文献

[1] Eells, E. (1988). On the Alleged Impossibility of Inductive Probability. *British Journal for the Philosophy of Science*, 39, 111-116.

[2] Fitelson, B. (1999). The Plurality of Bayesian Measures of Confirmation and the Problem of Measure Sensitivity. *Philosophy of Science*, 66, S362-S378.

[3] Fitelson, B. (2001). A Bayesian Account of Independent Evidence with Applications. *Philosophy of Science*, 68, S123-S140.

[4] Gillies, D. (1986). In Defence of the Popper-Miller Argument. *Philosophy of Science*, 53, 110-113.

[5] Good, I. J. (1960). Weight of Evidence, Corroboration, Explanatory Power, Information and the Untility of Experiments. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 22, 319-331.

[6] Myrvold, W. C. (2003). A Bayesian Account of the Virtue of Unification. *Philosophy of Science*, 70, 399-423.

[7] Popper, K. R. and Miller, D. (1983). A Proof of the Impossibility of Inductive Probability. *Nature*, 302, 687-688.

[8] Popper, K. R. and Miller, D. (1987). Why Probabilistic Support is Not Inductive?. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 321, 569-591.

[9] Redhead, M. L. G. (1985). On the Impossibility of Inductive Probability. *British Journal for the Philosophy of Science*, 36, 185-191.

[10] Reichenbach, H. (1956). *The Direction of Time*, Dover, New York.

[11] Salmon, W. C. (1980). Causality: Production and Propagation. *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, 2, 49-69.

著者情報

北島雄一郎 （日本学術振興会特別研究員）